

**ИССЛЕДОВАНИЕ НА ЭКСТРЕМУМ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ  
МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕЛЕКТИВНЫХ СИГНАЛОВ,  
ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ**

© Стрелковская И.В., 2009

**Просмотрено экстремум полной энергии многопараметрических селективных сигналов, построенных на основе кубических сплайнов. Исследованы экстремальные свойства этих сигналов.**

**Multiparameter signals for a case of interpolation of their spectral density by cubic spline are considered. Extremal properties of these signals are researched.**

Проведены исследования на экстремум энергии многопараметрических селективных сигналов, построенных на основе кубических сплайнов. Найдены наибольшее и наименьшее значения полной энергии многопараметрических сигналов в частотной области.

В технике цифровой связи нашли применение однопараметрические сигналы, удовлетворяющие первому критерию Найквиста (условию селективности), который записывается в виде [1]

$$g(kT) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

где  $T$  – длительность тактового интервала.

Спектр этих сигналов в области среза аппроксимируется прямой линией либо «приподнятым» косинусом [2]. Однопараметрические сигналы, где в качестве единственного параметра используется коэффициент скругления  $\alpha$ , не обладают способностью к гибкому изменению своей формы либо конфигурации спектральной плотности при изменении этого параметра в допустимых пределах.

Добавление новых параметров можно рассматривать как увеличение числа степеней свободы селективной функции с финитным спектром. Рассмотрим многопараметрические селективные сигналы, спектр которых в переходной области допускает аппроксимацию кубическими сплайнами [3].

Спектральная плотность такой сигнальной функции показана на рис. 1.

Аналитическая запись этого спектра имеет вид

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} UT, & |\omega| < \omega_A, \\ G_{\Delta 1}(\omega), & \omega_A \leq |\omega| \leq \omega_C, \\ G_{\Delta 2}(\omega), & \omega_C < |\omega| \leq \omega_B, \\ 0, & |\omega| > \omega_B, \end{cases} \quad (2)$$

где  $U = g(0)$ ;  $\omega_A = (1 - \alpha)\omega_C$ ;  $\omega_B = (1 + \alpha)\omega_C$ ;  $\omega_C = \pi/T$ ;  $\alpha = (\omega_C - \omega_A)/\omega_C = (\omega_B - \omega_C)/\omega_C$  – коэффициент скругления спектральной плотности ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), определяющий ширину переходной области  $[\omega_A, \omega_B]$ ;  $2\Delta\omega = 2\alpha\omega_C$  – ширина переходной области (рис. 1).

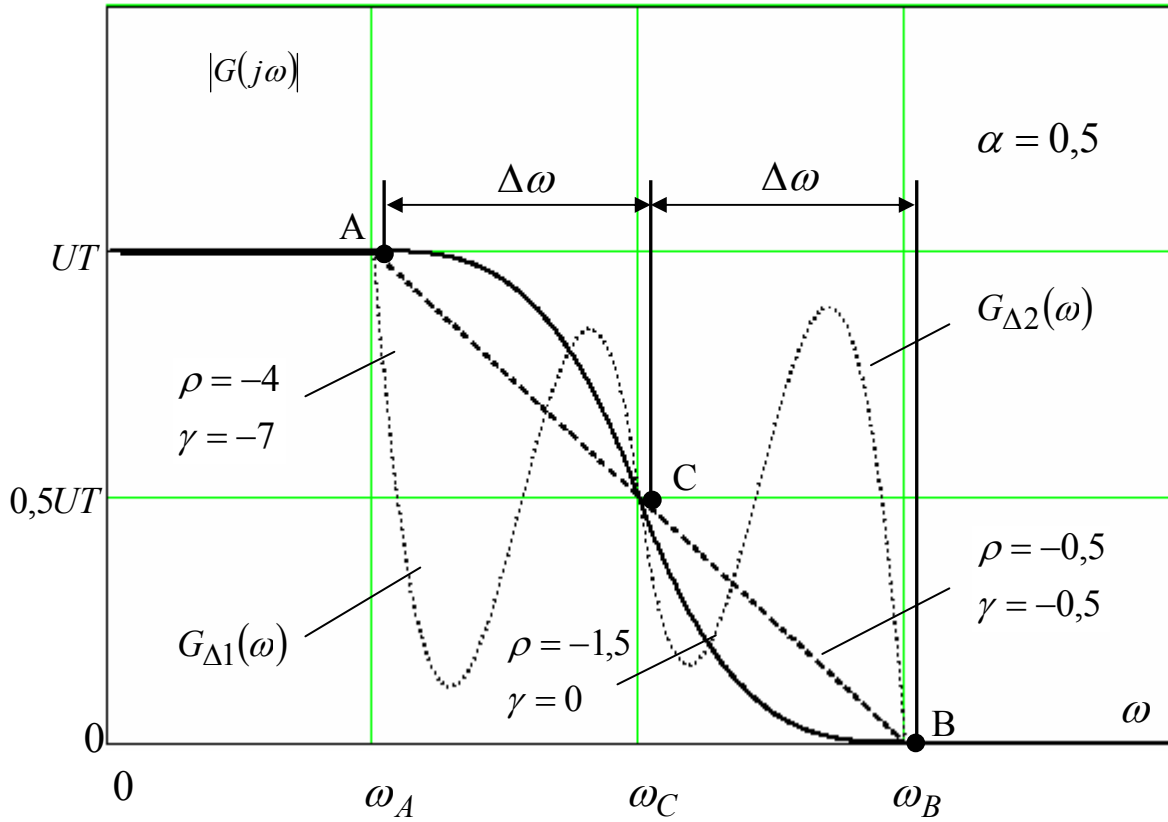


Рис. 1. Аппроксимации спектральной плотности  $G(j\omega)$  многопараметрических селективных сигналов кубическим сплайном

Аналитическое выражение для спектральной плотности в переходной области  $[\omega_A, \omega_B]$  получено методом интерполяции кусочно-кубическими многочленами, которые соединяют точки  $A, B$  и  $C$ .

В качестве таких многочленов использованы кубические сплайны класса  $C^2$  (кубические сплайны дефекта 1, являющиеся дважды непрерывно дифференцируемыми функциями). Интерполяционный кубический сплайн ищем на промежутке  $[\omega_C, \omega_B]$ , а затем восстанавливаем во всей переходной области.

Согласно [2, 3]  $G_{\Delta 1}(\omega)$  и  $G_{\Delta 2}(\omega)$  определяются выражениями

$$G_{\Delta 1}(\omega) = UT - G_{\Delta 2}(2\omega_C - \omega), \quad \omega_A \leq \omega \leq \omega_C, \quad (3)$$

$$G_{\Delta 2}(\omega) = 0,5UT + \frac{\rho UT}{\Delta\omega}(\omega - \omega_C) - \frac{(1,5 + 2\rho + \gamma)UT}{\Delta\omega^2}(\omega - \omega_C)^2 + \frac{(1 + \rho + \gamma)UT}{\Delta\omega^3}(\omega - \omega_C)^3, \quad \omega_C \leq \omega \leq \omega_B. \quad (4)$$

где безразмерные параметры  $\rho$  и  $\gamma$  определяют угловые коэффициенты спектральной плотности в точке  $C$  и  $B$  соответственно, и связаны соотношениями

$$y'(\omega_C) = \rho UT / \Delta\omega, \quad y'(\omega_B) = \gamma UT / \Delta\omega$$

и селективный сигнал  $g(t)$  (рис. 2) имеет вид

$$g(t) = 2U \frac{\sin \omega_C t}{\omega_C t} \left[ \frac{6(1 + \rho + \gamma)}{\Delta\omega^3 t^3} \sin \Delta\omega t - \frac{(3 + 2\rho + 4\gamma)}{\Delta\omega^2 t^2} \times (1 + \cos \Delta\omega t) + \frac{2(\gamma - \rho)}{\Delta\omega^2 t^2} - \frac{\gamma}{\Delta\omega t} \sin \Delta\omega t \right]. \quad (5)$$

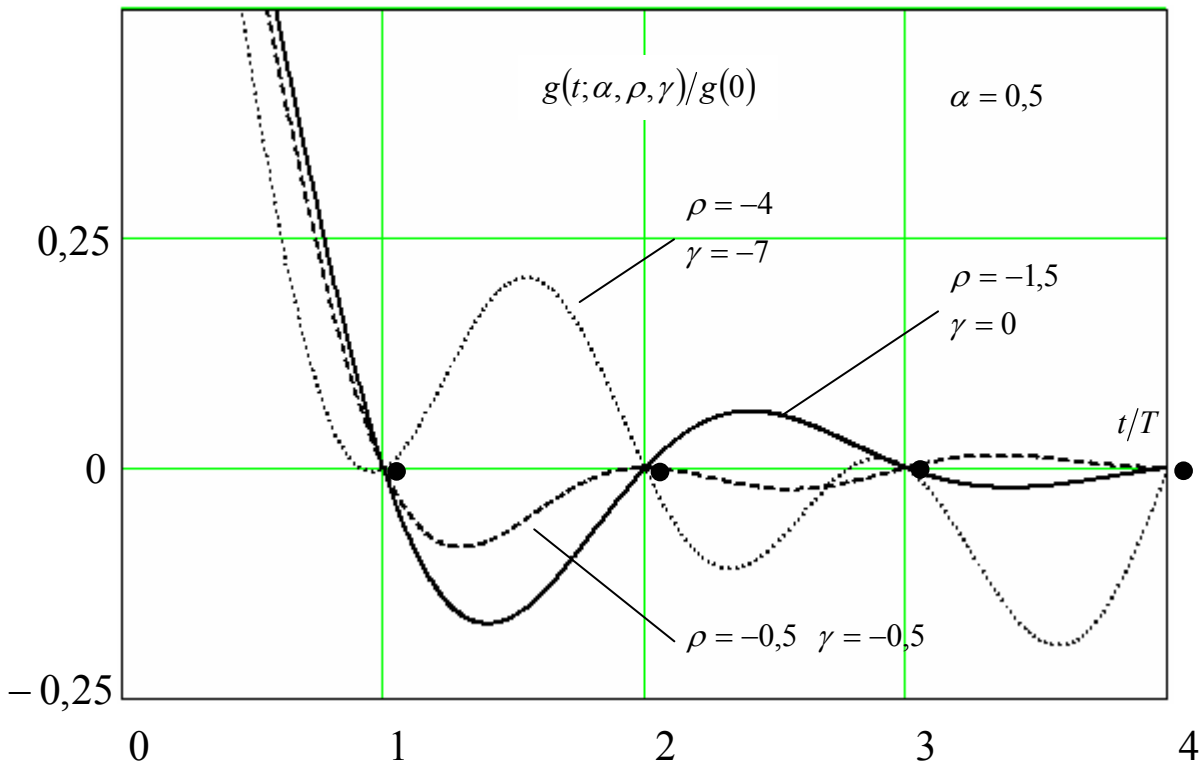


Рис. 2. Зависимость формы селективного сигнала  $g(t)$  от параметров  $\rho$  и  $\gamma$

Селективный сигнал (5) зависит от трех параметров  $\alpha, \rho$  и  $\gamma$  ( $0 \leq \alpha \leq 1, \rho, \gamma \in R$ , где  $R$  – множество действительных чисел). Первый параметр  $\alpha$  определяет ширину переходной области  $2\Delta\omega = 2\alpha\omega_c$ , параметры  $\rho$  и  $\gamma$  – форму спектра в переходной области. При изменении всех параметров в допустимых пределах функция  $g(t)$  остается в классе селективных сигналов, удовлетворяющих критерию (1).

В [3] для селективных сигналов вида (5) найдена полная энергия, которая имеет вид

$$E_\omega(\alpha, \rho, \gamma) = U^2 T \left[ (1 - \alpha) + \frac{2}{105} \alpha \left( \rho^2 - \frac{13}{4} \rho + 36 + \gamma^2 - \frac{3}{2} \rho \gamma + \frac{11}{2} \gamma \right) \right], \quad (6)$$

где  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\rho, \gamma$  – любые два действительных числа.

**Цель работы** – исследовать зависимость полной энергии (6) селективного сигнала (5) от параметров  $\alpha, \rho$  и  $\gamma$  кубического сплайна (4), который используется для интерполяции спектральной плотности (2) в переходной области  $[\omega_A, \omega_B]$ .

Экстремальные свойства полной энергии селективных сигналов для частного случая, когда , были исследованы в [3]. Проведем аналогичные исследования на экстремум полной энергии (6) для общего случая – когда селективный сигнал (5) зависит от трех параметров  $\alpha, \rho$  и  $\gamma$ .

Прежде, чем приступить к исследованию, определим область допустимых значений для параметров  $\alpha, \rho$  и  $\gamma$ . Если пределы изменения первого параметра известны ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), то границы изменения остальных параметров  $\rho$  и  $\gamma$  предстоит определить, опираясь на известные свойства спектра селективного сигнала.

Выражение в круглых скобках равенства (6) представляет собой квадратичную форму от двух действительных переменных  $\rho$  и  $\gamma$ , т.е.

$$Q(\rho, \gamma) = \rho^2 + \gamma^2 - \frac{3}{2} \rho \gamma - \frac{13}{4} \rho + \frac{11}{2} \gamma + 36. \quad (7)$$

Исследование  $Q(\rho, \gamma)$  позволит установить экстремальные свойства сигнальной функции  $g(t)$  и ее полной энергии  $E_\omega(\alpha, \rho, \gamma)$ , а также синтезировать оптимальные в том или ином смысле селективные сигналы на основании методики, предложенной в [4].

Естественно предположить, что

$$\frac{2}{105}\alpha\left(\rho^2 - \frac{13}{4}\rho + 36 + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma + \frac{11}{2}\gamma\right) \leq \alpha. \quad (8)$$

Действительно, если выполняется обратное, т. е.

$$\frac{2}{105}\alpha\left(\rho^2 - \frac{13}{4}\rho + 36 + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma + \frac{11}{2}\gamma\right) > \alpha, \quad (9)$$

то полная энергия селективного сигнала (5)

$$E_\omega(\alpha, \rho, \gamma) > U^2 T, \quad (10)$$

что невозможно, так как переходная область отсутствует и спектральная плотность имеет прямоугольную форму, максимальная энергия которой равна  $E_{\max} = U^2 T$ .

Решая неравенство (8), имеем

$$\rho^2 - \frac{13}{4}\rho + 36 + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma + \frac{11}{2}\gamma \leq \frac{105}{2}$$

или

$$\rho^2 - \frac{13}{4}\rho + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma + \frac{11}{2}\gamma - \frac{33}{2} \leq 0.$$

Итак, ограничения на  $\alpha, \rho$  и  $\gamma$  таковы:

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 1, \\ \rho^2 - \frac{13}{4}\rho + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma + \frac{11}{2}\gamma - \frac{33}{2} \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$\rho^2 - \frac{13}{4}\rho + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma + \frac{11}{2}\gamma - \frac{33}{2} \leq 0. \quad (12)$$

Покажем, что геометрическое место точек, удовлетворяющее равенству

$$\rho^2 - \frac{13}{4}\rho + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma + \frac{11}{2}\gamma - \frac{33}{2} = 0 \quad (13)$$

является эллипсом.

Действительно, сделав невырожденное линейное преобразование по формулам

$$\begin{cases} \rho = \frac{\rho'}{\sqrt{2}} - \frac{\gamma'}{\sqrt{2}}, \\ \gamma = \frac{\rho'}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma'}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (14)$$

и подставив (14) в (13), получим

$$\left(\rho' - \frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 7\left(\gamma' + \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 98 \quad (15)$$

или

$$\frac{\left(\rho' + \frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2}{(7\sqrt{2})^2} + \frac{\left(\gamma' + \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2}{(\sqrt{14})^2} = 1. \quad (16)$$

А это есть каноническое уравнение эллипса с центром в точке  $O' \left( -\frac{9\sqrt{2}}{4}; -\frac{5\sqrt{2}}{4} \right)$  и полуосями  $7\sqrt{2}$  и  $\sqrt{14}$  в новой системе координат  $\rho'O\gamma'$ , которая была получена из старой Декартовой системы координат  $\rho O\gamma$  поворотом на угол  $\frac{\pi}{4}$  в положительном направлении.

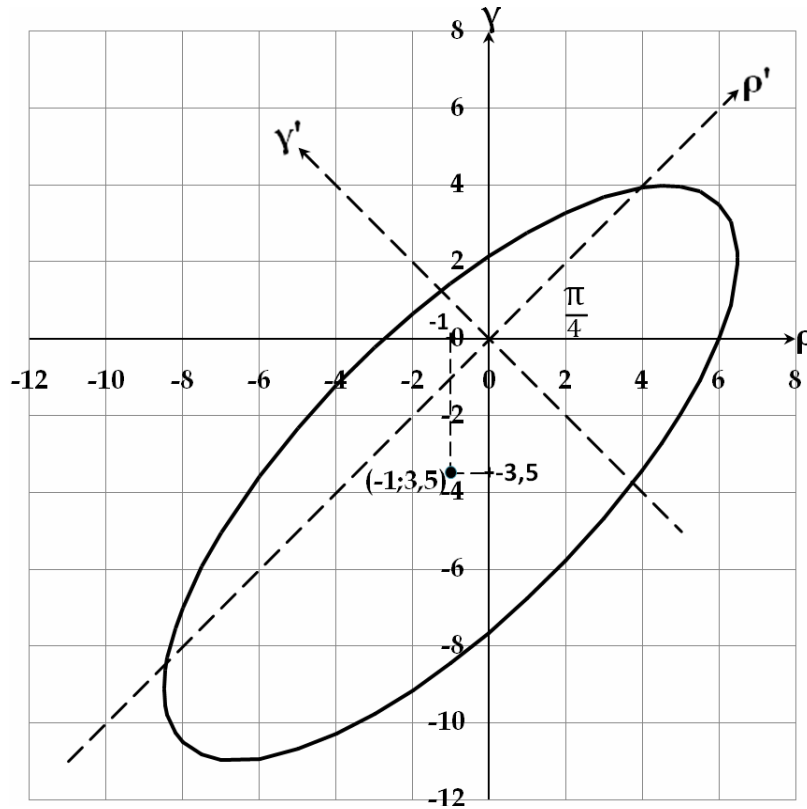


Рис. 3. Область допустимых значений для параметров  $\rho$  и  $\gamma$

Центр  $O' \left( -\frac{9\sqrt{2}}{4}; -\frac{5\sqrt{2}}{4} \right)$  Декартовой системы координат  $\rho'O\gamma'$  перейдет в центр  $O(\rho, \gamma)$

Декартовой системы координат  $\rho O\gamma$ , где

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4} \right), \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{9\sqrt{2}}{4} - \frac{5\sqrt{2}}{4} \right) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \rho = -1, \\ \gamma = -\frac{7}{2}, \end{cases}$$

то есть  $O \left( -1; -\frac{7}{2} \right)$ .

Итак, геометрическое место точек, удовлетворяющее неравенству (12), есть внутренняя и граничная части эллипса, каноническое уравнение которого в Декартовой системе координат  $\rho'O\gamma'$  представлено в виде (16) (рис. 3).

Для упрощения записи обозначим  $E_\omega(\alpha, \rho, \gamma)$  через  $U^2 Tf(\alpha, \rho, \gamma)$ , то есть

$$E_\omega(\alpha, \rho, \gamma) = U^2 Tf(\alpha, \rho, \gamma). \quad (17)$$

Исследуем функцию  $f(\alpha, \rho, \gamma)$  на экстремум в области  $D$ , где

$$D = \left\{ (\alpha, \rho, \gamma): 0 \leq \alpha \leq 1, \rho, \gamma \in R: \rho^2 - \frac{13}{4}\rho + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma + \frac{11}{2}\gamma - \frac{33}{2} \leq 0 \right\}. \quad (18)$$

Функция

$$f(\alpha, \rho, \gamma) = 1 - \alpha + \frac{2}{105}\alpha \left( \rho^2 - \frac{13}{4}\rho + 36 + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma + \frac{11}{2}\gamma \right) \quad (19)$$

определена всюду в области  $D$ . Ее частные производные

$$\begin{cases} f'_\alpha(\alpha, \rho, \gamma) = -1 + \frac{2}{105} \left( \rho^2 + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma - \frac{13}{4}\rho + \frac{11}{2}\gamma + 36 \right), \\ f'_\rho(\alpha, \rho, \gamma) = \frac{2\alpha}{105} \left( 2\rho - \frac{3}{2}\gamma - \frac{13}{4} \right), \\ f'_\gamma(\alpha, \rho, \gamma) = \frac{2\alpha}{105} \left( 2\gamma - \frac{3}{2}\rho + \frac{11}{2} \right) \end{cases} \quad (20)$$

существуют всюду в области  $D$ .

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума функции [5], находим стационарные точки, решая систему уравнений

$$\begin{cases} -1 + \frac{2}{105} \left( \rho^2 + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma - \frac{13}{4}\rho + \frac{11}{2}\gamma + 36 \right) = 0, \\ \frac{2\alpha}{105} \left( 2\rho - \frac{3}{2}\gamma - \frac{13}{4} \right) = 0, \\ \frac{2\alpha}{105} \left( 2\gamma - \frac{3}{2}\rho + \frac{11}{2} \right) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Решая второе и третье уравнения системы алгебраических уравнений (21), находим  $\rho = -1, \gamma = -\frac{7}{2}$ .

Подставляя найденные значения  $\rho = -1, \gamma = -\frac{7}{2}$  в первое уравнение системы уравнений (21), получаем  $-\frac{49}{105} \neq 0$ .

Последнее означает, что не существует таких  $\alpha, \rho$  и  $\gamma$ , для которых (если  $\alpha \neq 0$ ) выполняются необходимые условия (21) существования экстремума функции, т.е. точек экстремума функция (17) не имеет.

Найдем наименьшее и наибольшее значения полной энергии селективных сигналов вида (5) в частотной области. Наибольшее значения полная энергия (6) селективного сигнала (5) достигает при  $\alpha = 0$  и условиях (12). Оно равно  $U^2 T$ . Найдем наименьшее значение функции (6).

Действительно,

$$\begin{aligned} E_\omega(\alpha, \rho, \gamma) &= U^2 T \left[ (1 - \alpha) + \frac{2}{105} \alpha \left( \rho^2 - \frac{13}{4}\rho + 36 + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma + \frac{11}{2}\gamma \right) \right] \geq \\ &\geq U^2 T \left[ (1 - \alpha) + \frac{2}{105} \alpha Q_{\text{наим}}(\rho, \gamma) \right], \end{aligned}$$

где  $Q(\rho, \gamma) = \rho^2 - \frac{13}{4}\rho + 36 + \gamma^2 - \frac{3}{2}\rho\gamma + \frac{11}{2}\gamma \geq Q_{\text{наим}}(\rho, \gamma) = Q_{\text{наим}}\left(-1; -\frac{7}{2}\right) = 28$ .

Тогда

$$E_{\omega}(\alpha, \rho, \gamma) \geq U^2 T \left( 1 - \alpha + \frac{2}{105} \alpha 28 \right) = U^2 T \left( 1 - \frac{49}{105} \alpha \right) \geq \frac{56}{105} U^2 T .$$

Таким образом, полная энергия селективных сигналов вида (5) удовлетворяет неравенствам

$$\frac{56}{105} U^2 T \leq E_{\omega}(\alpha, \rho, \gamma) \leq U^2 T .$$

Эти исследования дают возможность рассчитать энергетические показатели телекоммуникационной системы на этапе проектирования и выбрать оптимальную форму сигнала относительно выбранного критерия.

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с. 2. Сукачев Э.А. Определение формы сигнала, удовлетворяющего первому критерию Найквиста // Радиоэлектроника: Изв. высш. учеб. заведений. – 2001. – Т.44, №12. – С. 65–69. 3. Стрелковська І.В. Повна енергія селективних сигналів з параметрами, побудованих на основі сплайн-інтерполяції // Вісник національного університету “Львівська політехніка” “Радіоелектроніка та телекомунікації”. – 2004. – № 508. – С. 52–57. 4. Сукачев Э.А., Стрелковская И.В. Синтез многопараметрических селективных сигналов, построенных на основе кубических сплайнов // Всеукр. межвед. научно-техн. сб. “Радиотехника”. – 2004. – Вып. 138. – С. 209–213. 5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 607 с.