УДК 681.322

АНАЛИЗ БЛОКОВ МБФ РАНГА 6

ТКАЧЕНКО В.Г., ЖМУРКО Ю.В.

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова,
ул. Кузнечная, 1, Одесса, 65029, Украина
kaf.mcc@onat.edu.ua

АНАЛІЗ БЛОКІВ МБФ РАНГУ 6

ТКАЧЕНКО В.Г., ЖМУРКО Ю.В.

Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова,
вул. Кузнечна, 1, Одеса, 65029, Україна
kaf.mcc@onat.edu.ua

ANALYSIS OF MBF BLOCKS RANK 6

TKACHENCO V.G., ZHMURKO Y.V.

O.S. Popov Odessa national academy of telecommunications
Kuznechna st., 1, Odessa, 65029, Ukraine
kaf.mcc@onat.edu.ua

Аннотация. *В статье рассмотрены все блоки монотонных булевых функций (МБФ) ранга 6. Доказан ряд новых свойств для блоков МБФ. Предложенный метод может быть использован для анализа МБФ больших рангов. Даны таблицы, в которых описаны все блоки МБФ от 4 до 6 ранга. На основе этих таблиц подсчитаны основные зависимости для этих блоков.*

Ключевые слова:*монотонные булевы функции, неэквивалентные МБФ, дизъюнктивное дополнение, конъюнктивное дополнение, число Дедекинда, типы блоков МБФ.*

Анотація. *У статті розглянуті усі блоки монотонних бульових функцій (МБФ) рангу 6. Доведена низка нових властивостей для блоків МБФ. Запропонований метод може бути використаний для аналізу МБФ великих рангів. Надані таблиці, в яких описані усі блоки МБФ від 4 до 6 рангу. На основі цих таблиць підраховані основні залежності для цих блоків.*

Ключові слова:*монотонні бульові функції, нееквівалентні МБФ,диз'юнктивне доповнення, кон'юнктивне доповнення, число Дедекінда, типи блоків МБФ.*

Abstract. *Considered all the monotone boolean functions (MBFs) blocks of the sixth rank. It proved a series of new properties MBF blocks. The proposed methods can be used to analyze large ranks MBFs. The tables which describe all of the blocks from 4th to 6th rank are provided. On the basis of these tables are counted typical depending to these blocks.*

Key word*:monotone boolean functions,inequivalent MBFs, disjunctive complement, conjunctive complement, Dedekind number, types of MBF blocks.*

ВВЕДЕНИЕ

В 1897 году Р. Дедекинд опубликовал статью [1], в которой было найдено число элементов свободной дистрибутивной решётки с четырьмя образующими. Число $\psi(n)\psi(n)$ элементов свободной дистрибутивной решётки с *n* образующими совпадает с числом антицепей в единичном *n*-мерном кубе. На языке алгебры логики $D(n)=\psi(n)+2-$ число монотонных булевых функций (МБФ), зависящих от *n* переменных $x_1, \ldots, x_n$. Задачу вычисления $\psi(n)$ принято называть проблемой Дедекинда. $D(0)\ldots D(5)$ были получены Черчем в 1940г., $D(6)$ вычислен Вардом в 1946г., $D(7)$ рассчитано Чёрчем в 1965г. и $D(8)$ получено Видеманом [2] в 1991г. Как оказалось, эта проблема довольно трудна и не поддаётся решению в рамках традиционного метода производящих функций.

Однако в литературе, за исключением работ [3] и [4], не рассмотрен метод анализа и классификации МБФ на основе построения блоков МБФ (множеств МБФ, связанных рассмотренными далее тремя операциями), который в ряде случаев позволяет сократить перебор МБФ за счёт того, что можно исключить все изоморфные блоки и рассматривать только неизоморфные. Анализ блоков МБФ позволяет по-новому рассмотреть эту проблему.

В [5] впервые показаны построение блоков для МБФ различных рангов.

Целью статьи является разработка метода анализа блоков МБФ и подсчёт основных зависимостей для блоков ранга 6.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним основные понятия, связанные с МБФ. Булева функция $f(x_1,...,x_n)$ называется монотонной, если для любых пар наборов значений переменных $(a_1,...,a_n)$ и $(b_1,...,b_n)$, для которых поэлементно выполняется отношение $(a_1,...,a_n)\le(b_1,...,b_n)$ верно и неравенство $f(a_1,...,a_n)\le f(b_1,...,b_n)$. Из элементарных булевых функций монотонными являются, например, конъюнкция и дизъюнкция. Любая функция, полученная с помощью операции суперпозиции из монотонных булевых функций, сама является монотонной. Поэтому функция, составленная при помощи операций дизъюнкции и конъюнкции, также будет монотонной.

Скажем, что конъюнкция *B* поглощается конъюнкцией *A* если в конъюнкции *B* содержатся все переменные, которые есть в конъюнкции *A*. Будем рассматривать МБФ в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ), т.е. дизъюнкцию конъюнкций, в которой ни одна не поглощается другой. Будем говорить, что один набор конъюнкций поглощает другой набор, если все конъюнкции одного набора поглощаются конъюнкциями другого набора.

Будем обозначать булеву функцию n переменных,(n ранга) – $f_i(n)$, здесь i – порядковый номер МБФ.

Для представления функций будем использовать также двоичный вид. Запишем булеву функцию $f(n)$ в виде двоичного вектора $f(n)=a_1a_2...a_t$, где $t=2^n$, a_i может принимать либо 0 либо 1. Причём, запишем справа значение функции, принимаемое на самом младшем наборе, а слева на старшем наборе. Наборы упорядочим так: справа младшая переменная x_1, а слева старшая – x_n. Например, возьмём монотонную функцию от 3-х переменных $f(3)=x_1x_2=10001000$. Эта функция равна 1 только на наборах $x_3x_2x_1=011$ и $x_3x_2x_1=111$. На остальных наборах функция равна 0.

В [6] на множестве МБФ любого ранга определены три унарные операции. Двойственность, обозначим её как φ^{-1}, дизъюнктивное дополнение, обозначим его как $\overline{\varphi}$ и конъюнктивное дополнение, обозначим его как $\underline{\varphi}$. Для получения дизъюнктивного дополнения $\overline{f_i}(n)$ от *i*-й МБФ $f_i(n)$ нужно заменить в минимальной дизъюнктивной форме каждую конъюнкцию из m переменных на конъюнкцию из всех $n-m$ переменных, не входящих в первоначальную конъюнкцию. Для получения конъюнктивного дополнения $\underline{f_i}(n)$ от *i*-й МБФ $f_i(n)$ нужно заменить в минимальной конъюнктивной форме каждую дизъюнкцию из m переменных на дизъюнкцию из всех $n-m$ переменных, не входящих в первоначальную дизъюнкцию. Для получения двойственной МБФ $f_i^{-1}(n)$ от *i*-й МБФ $f_i(n)$ нужно заменить в минимальной дизъюнктивной форме все операции конъюнкции на операции дизъюнкции и одновременно заменить все операции дизъюнкции операциями конъюнкции. При этом двойственная МБФ $f_i^{-1}(n)$ получается в минимальной конъюнктивной форме. Для получения двойственной МБФ $f_i^{-1}(n)$ в минимальной дизъюнктивной форме нужно в полученной минимальной конъюнктивной форме раскрыть скобки и привести подобные члены.

Определение. Блоком МБФ называется множество МБФ, замкнутое относительно трёх операций: двойственности, дизъюнктивного дополнения и конъюнктивного дополнения и такое, что любую МБФ блока можно получить из любой МБФ этого же блока, используя некоторую последовательность этих трёх операций.

Например, для рангов 0 и 1 существует только один блок (рис.1), который состоит для первого случая из двух функций, а для второго случая из трёх функций

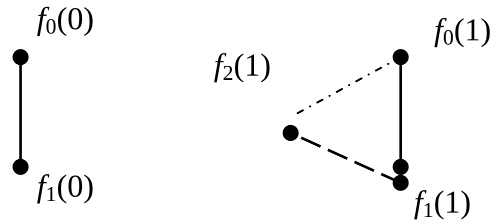

Рисунок 1– Блоки МБФ рангов 0 и 1

Здесь операция двойственности изображается сплошной линией, операция дизъюнктивного дополнения – штриховой линией и операция конъюнктивного дополнения – штрихпунктирной линией; $f_0(n)$–нулевая МБФ (равная 0 при всех наборах переменных); $f_1(n)$– единичная МБФ (равная 1 при всех наборах переменных), $f_2(1) = x_1$.

Лемма 1. Операция конъюнктивного дополнения эквивалентна последовательности операций двойственности, дизъюнктивного дополнения и снова двойственности. Т.е. в наших обозначениях: $\underline{\varphi} = \varphi^{-1}\overline{\varphi}\varphi^{-1}$

Доказательство. Известно, что двойственную функцию g можно получить, заменив в исходной f операции конъюнкции операциями дизъюнкциями с сохранением приоритета операций и наоборот если такую же замену операций провести в двойственной функции, то получим исходную функцию записанной в КНФ. Отсюда следует, что конъюнктивное дополнение функции f и дизъюнктивное дополнение функции g будут двойственными друг к другу. Лемма доказана.

Следствие. Блок можно определить как множество МБФ замкнутое относительно трёх операций: двойственности, дизъюнктивного дополнения и конъюнктивного дополнения и такие, что любую МБФ блока из любой функции блока, используя некоторую последовательность только двух операций φ^{-1} и $\overline{\varphi}$.

Таким образом, из одной функции f можно построить блок функций, применяя к функции f по очереди сначала операцию дизъюнктивного дополнения, а затем операцию двойственности. И каждая функция может принадлежать только одному блоку.

Введём некоторые понятия. Мощность блока это количество МБФ, которые в него входят. Два блока являются подобными, если они одной мощности и при абстрагировании от входящих в них МБФ эти блоки неотличимы. Два блока являются изоморфными, если любую МБФ одного блока можно получить из некоторой МБФ другого блока некоторой подстановкой переменных. По определению изоморфные блоки являются подобными.

Все блоки МБФ можно разделить на 4 вида. Из леммы 1 следует, что все МБФ можно связать с помощью последовательности двух операций – двойственности и дизъюнктивного дополнения. Последовательность этих двух операций может быть разомкнутой или циклической. В первом случае на концах этой последовательности может быть две дизъюнктивно самодополнительные МБФ либо одна дизъюнктивно самодополнительная МБФ и одна самодвойственная МБФ, либо два самодвойственные МБФ, т.е. три вида. Во втором случае самодвойственных и дизъюнктивно самодополнительных МБФ нет. Примеры видов блоков МБФ:

1 Содержащие две дизъюнктивно самодополнительные МБФ.

Пример такого блока ранга 4 (рис 2):

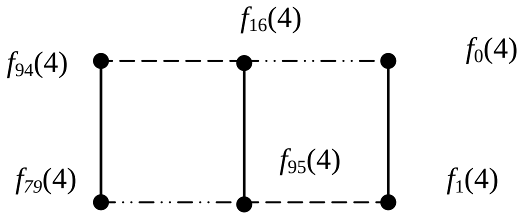

Рисунок2 – Блок МБФ с 2-мядизъюнктивно самодополнительными МБФ

Здесь $f_{16}(4) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$,
$f_{79}(4) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4$, $f_{94}(4) = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_4 \vee x_2x_3x_4$,
$f_{95}(4) = x_1x_2x_3x_4$. Функции $f_0(4)$ и $f_{79}(4)$ дизъюнктивно самодополнительные.

Здесь и далее номера функций взяты из работ [3] и [4].

2 Содержащие одну дизъюнктивно самодополнительную МБФ и одну самодвойственную МБФ.

Пример такого блока ранга 4 (рис.3):

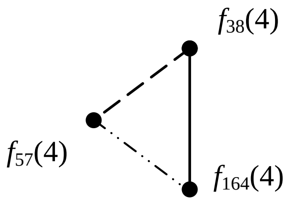

Рисунок 3– Блок МБФ с одной дизъюнктивно самодополнительной и одной самодвойственной МБФ

Здесь $f_{38}(4) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4$, $f_{57}(4) = x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4$, $f_{164}(4) = x_1x_2x_3x_4$. Функция $f_{164}(4)$ дизъюнктивно самодополнительные, а $f_{57}(4)$ самодвойственная.

3 Содержащие две самодвойственные МБФ.

Пример такого блока ранга 4 (рис.4):

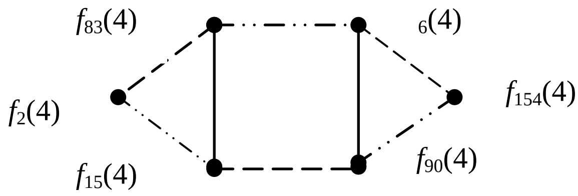

Рисунок 4 – Блок МБФ с двумя самодвойственными МБФ

Здесь $f_2(4)=x_1$, $f_{83}(4)=x_2x_3x_4$, $f_{15}(4)=x_2 \vee x_3 \vee x_4$, $f_{90}(4)=x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_4$, $f_{126}(4)=x_1 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4$ и $f_{154}(4)=x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3x_4$. МБФ $f_2(4)$ и $f_{126}(4)$ являются самодвойственными.

4 Циклические блоки.

Пример такого блока ранга 4 (рис.5):

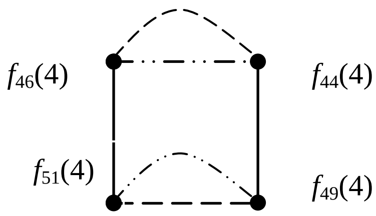

Рисунок 5 – Циклический блок МБФ

Здесь $f_{46}(4)=x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_4$, $f_{44}(4)=x_1x_2 \vee x_1x_4 \vee x_3x_4$, $f_{49}(4)=x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_4$, $f_{51}(4)=x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4$. Все функции блока соединены тремя операциями.

Блоки из двух функций могут быть двух видов, из трёх функций одного вида, из четырёх функций трёх видов, из шести функций трёх видов (рис.6):

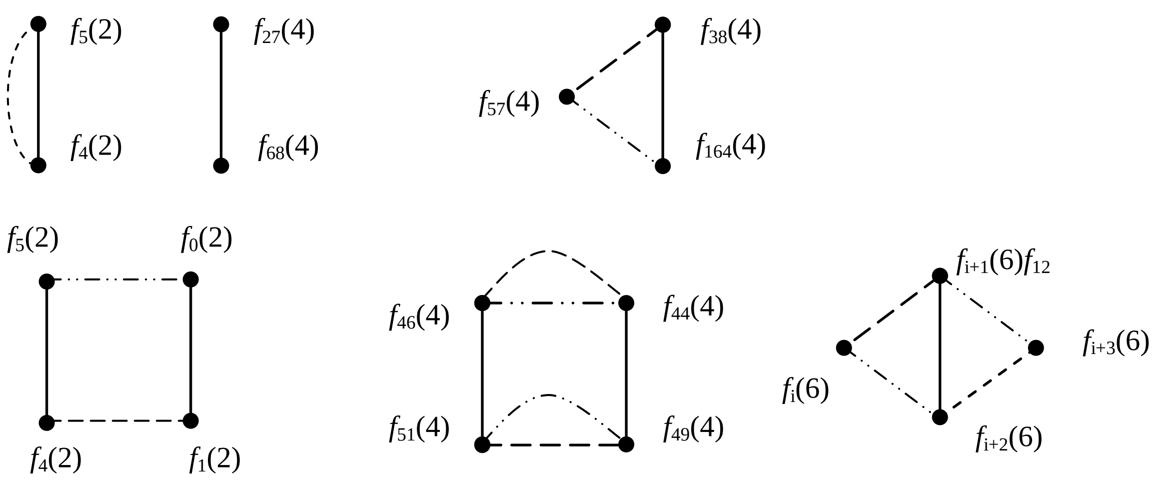

Рисунок 6 – Блоки МБФ из двух, трёх, и четырёх функций

Здесь $f_i(6) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_1x_5 \vee x_1x_6 \vee x_2x_3x_4x_5x_6$,

$f_{i+1}(6) = x_1 \vee x_3x_4x_5x_6 \vee x_2x_4x_5x_6 \vee x_2x_3x_5x_6 \vee x_2x_3x_4x_6 \vee x_2x_3x_4x_5$,

$f_{i+2}(6) = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_{4\vee}x_1x_2x_5 \vee x_1x_2x_6 \vee x_1x_3x_4 \vee x_1x_3x_5 \vee x_1x_3x_6 \vee x_1x_4x_5 \vee x_1x_4x_6 \vee x_1x_5x_6$,

$f_{i+3}(6) = x_4x_5x_6 \vee x_3x_5x_6 \vee x_3x_4x_6 \vee x_3x_4x_5 \vee x_2x_5x_6 \vee x_2x_4x_6 \vee x_2x_4x_5 \vee x_2x_3x_6 \vee x_2x_3x_5 \vee x_2x_3x_4$.
Остальные номера функций взяты из работ [3] и [4]

Назовём базовым блоком блок, который содержит функции $f_0(n)$ и $f_1(n)$).

Для функции нулевого и первого ранга существует только один блок, который является базовым (см. рис. 1).

МБФ ранга 2 можно представить в виде двух блоков, один из которых состоят из четырёх МБФ(базовый), а другой – из двух МБФ (рис.7):

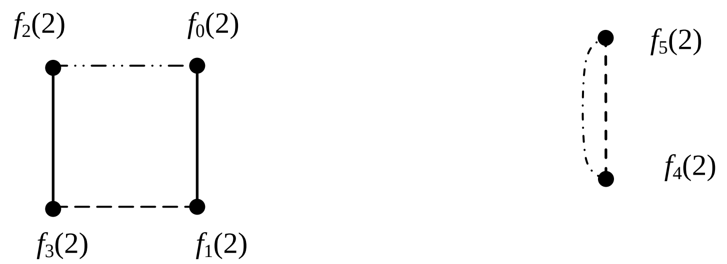

Рисунок 7– Блоки МБФ ранга 2

Здесь $f_2(2) = x_1x_2, f_3(2) = x_1x_2, f_4(2) = x_1, f_5(2) = x_2$. Функция $f_2(2)$ будет дизъюнктивно самодвойственной, $f_3(2)$– конъюнктивно самодвойственной, $f_2(2)$, $f_3(2)$– самодвойственные.

Базовые блоки могут быть двух видов: либо первого либо второго. Более точно – либо с одной самодвойственной и одной дизъюнктивно самодополнительной для нечётных рангов либо с двумя дизъюнктивно самодополнительными для чётных рангов. Например, базовые блоки 3, 4, рангов (рис.8):

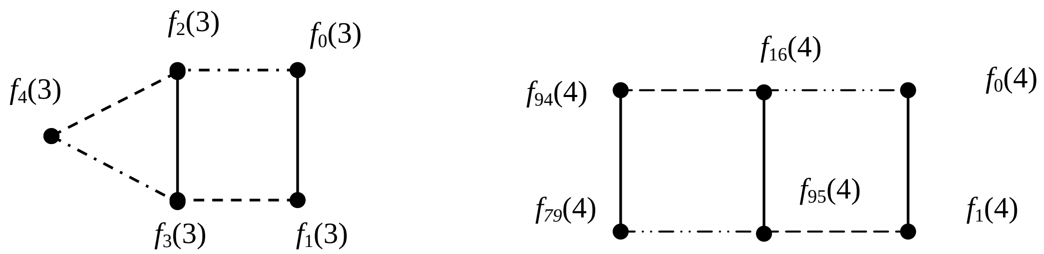

Рисунок 8–Базовые блоки 3, 4 рангов

Так как в базовый блок входят нулевая и единичная МБФ, то несложно показать, что каждая функция этого блока состоит из дизъюнкции C_n^k конъюнкций одной длины, здесь k – количество переменных в конъюнкции. Поэтому количество МБФ базового блока n-го ранга равно количеству коэффициентов бинома Ньютона степени nи ещё нулевая МБФ, т.е. $n+2$.

Пусть задана МБФ в виде ДНФ: $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\bigvee_{j=1}^{k}\left(\delta_1^j\vee x_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\delta_n^j\vee x_n\right)$, здесь k – количество конъюнкций в ДНФ; $\delta_i^j=\begin{cases}1, & i\notin j\\ 0, & i\in j\end{cases}$, i – номер переменной; j – номер конъюнкции. С помощью подстановки $S=\left(t_1,...,t_n\right)$ из этой функции получим изоморфную к ней $g\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\bigvee_{j=1}^{k}\left(\delta_{t_1}^j\vee x_{t_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\delta_{t_n}^j\vee x_{t_n}\right)$.

Лемма 2. Функции f_1 и g_1 двойственные к изоморфным f и g тоже изоморфны.

Доказательство. Из МБФ $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ какого-нибудь блока, которая задана в виде ДНФ с помощью операции двойственности, получим двойственную МБФ $f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\bigwedge_{j=1}^{k}\left(\left(1-\delta_1^j\right)x_1\vee\ldots\vee\left(1-\delta_n^j\right)x_n\right)$.

Применив к изоморфной МБФ g операцию двойственности, получим двойственную МБФ $g_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\bigwedge_{j=1}^{k}\left(\left(1-\delta_{t_1}^j\right)x_{t_1}\vee\ldots\vee\left(1-\delta_{t_n}^j\right)x_{t_n}\right)$, которая, как видно, получается из f_1 подстановкой S и следовательно изоморфна к f_1. Таким образом, из двух изоморфных функций f и g мы, с помощью операции двойственности, получили две также изоморфные функции f_1 и g_1.

Лемма 3. Функции f_2 и g_2 дизъюнктивно-дополнительные к изоморфным f и g также изоморфны.

Доказательство. Аналогично лемме 2. Из МБФ $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ с помощью операции дизъюнктивного дополнения получаем $f_2\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\bigvee_{j=1}^{k}\left(\left(\left(1-\delta_1^j\right)\vee x_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\left(1-\delta_n^j\right)\vee x_n\right)\right)$, а из МБФ $g\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ получим дизъюнктивно-дополнительную МБФ $g_2\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\bigvee_{j=1}^{k}\left(\left(\left(1-\delta_{t_1}^j\right)\vee x_{t_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\left(1-\delta_{t_n}^j\right)\vee x_{t_n}\right)\right)$. Мы видим, что МБФ получается из f_2 подстановкой S и, следовательно, изоморфна к f_2.

Лемма 4. Пусть задана функция f с помощью некоторой подстановки α, получим изоморфную к ней g. Если к этим двум изоморфным функциям применим какую-то последовательность из трёх операций: двойственности, конъюнктивного и дизъюнктивного дополнений, то получим две изоморфные функции f_1 и g_1. Причём одна из них будет получаться из другой с помощью подстановки α.

Доказательство. Заметим, что операция конъюнктивного дополнения эквивалентна последовательности операций: двойственности, дизъюнктивного дополнения и опять двойственности (лемма 1). Последовательно применяя к изоморфным МБФ f и g леммы 2 и 3, получим изоморфные f_1 и g_1. Это будет не одна функция, так как каждая из трёх операций является унарной и взаимно-обратимой, т.е. инволюцией и из одной функции мы не можем, используя одинаковую последовательность операций, получить разные функции.

Из лемм 2, 3 и 4 сразу следует такое утверждение:

Лемма 5. От любого количества изоморфных с помощью применения к ним последовательности из трёх вышеописанных операций получим такое же количество изоморфных.

Теорема 1. Любые две МБФ одного блока имеют одинаковое количество изоморфных.

Доказательство. Из следствия лемм получаем, что из двух изоморфных МБФ f и g с помощью любой последовательности из вышеописанных трёх операций также получаем изоморфные МБФ f_1 и g_1.

Выберем в блоке 2 произвольные МБФ f и f_1. Допустим, что у f больше изоморф МБФ чем у f_1. По определению блока МБФ f_1 можно получить из МБФ f с помощью некоторой последовательности операций P. Применим эту же последовательность P ко всем функциям, изоморфным к f. По доказанному ранее, в результате мы получим функции, изоморфные к f_1. Следовательно, мы получили количество изоморфных МБФ к f_1 равно количеству изоморфных МБФ к f, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Теорема 2. Для каждой МБФ блока количество изоморфных МБФ в блоке одно и тоже.

Доказательство. Пусть некоторая МБФ блока f имеет максимальное множество изоморфных функций в блоке. Обозначим это множество через *A*. В блоке возьмём какую-нибудь другую неизоморфную к f функцию g. Выберем последовательность операций, при которой из функции f получается функция g. По определению блока такую последовательность всегда можно осуществить. От функции g и всех её изоморфных с помощью той же последовательности операций получим множество *B* функций. Из леммы 5 следует, что в множестве *B* МБФ будут изоморфны друг к другу и их количество будет такое же как и в множестве *A*. Теорема доказана.

Число изоморфных МБФ для одной функции в блоке назовём индексом блока. Из определения изоморфных блоков и из лемм 2, 3, 4 и 5справедливо утверждение:

Следствие 1. Изоморфные блоки имеют одинаковый индекс.

Следствие 2. Блоки первого и третьего вида имеют индекс не более 2. Поскольку функция изоморфная самодвойственной должна быть тоже самодвойственной и изоморфная дизъюнктивно самодополнительной должна быть тоже дизъюнктивно самодополнительной и эти блоки имеют только по две такого вида МБФ. А блоки вида 2 имеют индекс 1, так ка у них по одной самодвойственной и по одной дизъюнктивно самодополнительной и изоморфных к ней в блоке не существует. Блоки четвёртого вида могут иметь любой индекс.

Так как для любых неизоморфных МБФ одного блока f и g по теореме 2 имеется одинаковое число изоморфных к каждой функции f и g, следовательно, что количество изоморфных для какой-нибудь функции блока является делителем числа всех МБФ блока. Поэтому индекс блока является делителем числа всех МБФ блока. Результат деления это количество неизоморфных МБФ в блоке. Отсюда также следует, что если мы возьмём все изоморфные МБФ к данной функции, то получим количество изоморфных блоков.

С помощью такой классификации можно определять различные свойства МБФ.

Например, рассмотрим разбиение всех блоков МБФ 4-го ранга по такой классификации

.

Таблица 1– Блоки ранга 4, содержащие две дизъюнктивно самодополнительные МБФ

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
1	6	1	1	1
2	2	3	1	1

Таблица 2 – Блоки ранга 4, содержащие 1 дизъюнктивно самодополнительную МБФ и 1 самодвойственную МБФ

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{20}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}
1	3	4	1	1

Таблица 3 – Блоки ранга 4, содержащие две самодвойственные МБФ

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{30}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}
1	6	4	1	1

Таблица 4 – Циклические блоки 4 ранга

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{40}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}
1	4	3	4	1
2	12	3	2	1
3	12	6	2	1

Количество неизоморфных блоков (или групп изоморфных блоков) ранга 4, т.е. сумма значений последних столбцов во всех четырёх таблиц $BN(4)=\sum C_{i4}=7$, $i=1,...,4$.

Количество всех блоков ранга 4, т.е. суммируем произведение значений третьего столбца на пятый во всех четырёх таблиц $B(4)=\sum C_{i2}\cdot C_{i4}=24$, $i=1,...,4$.

Количество неизоморфных МБФ ранга 4 $FN(4)=\sum\frac{C_{i2}\cdot C_{i4}}{C_{i3}}=30$, $i=1,...,4$ (Количество МБФ в блоке делим на индекс блока и умножаем на количество неизоморфных блоков, далее суммируем по всем таблицам).

Количество всех МБФ ранга 4 (число Дедекинда) $D(4)=\sum C_{i1}\cdot C_{i2}\cdot C_{i4}=168$, $i=1,...,4$.

Количество неизоморфных дизъюнктивно самодополнительных МБФ ранга 4: $DCN(4)=\sum(2C_{14}+C_{24})=5$, $i=1,...,4$.

Количество всех дизъюнктивно самодополнительных МБФ ранга 4: $DC(4)=\sum(2C_{14}\cdot C_{12}+C_{24}\cdot C_{22})=12$, $i=1,...,4$.

Количество неизоморфных самодвойственных МБФ ранга 4: $DSN(4)=\sum(2C_{34}+C_{24})=3$, $i=1,...,4$.

Количество всех самодвойственных МБФ ранга 4: $DS(4)=\sum(2C_{34}\cdot C_{32}+C_{24}\cdot C_{22})=12$, $i=1,...,4$.

Количество неизоморфных полностью несимметричных МБФ ранга 4(суммируем только те строки, где $C_{42}C_{43}$ = 4! = 24). $RN(4)=\sum\frac{C_{i1}\cdot C_{i4}}{C_{i3}}=0$, $i=1,...,4$.

Количество всех полностью несимметричных МБФ ранга 4(суммируем только те строки, где $C_{42}C_{43}$ = 4! = 24). $R(4)=\sum C_{i1}\cdot C_{i2}\cdot C_{i4}=0$, $i=1,...,4$.

Также для пятого ранга.

Таблица 5 – Блоки ранга 5, содержащие одну дизъюнктивно самодополнительную МБФ и 1 самодвойственную МБФ

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{20}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}
1	7	1	1	1
2	7	5	1	2
3	7	10	1	2
4	7	20	1	1
5	7	30	1	1

Таблица 6 – Циклические блоки 5 ранга

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{40}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}
1	4	6	2	1
2	6	5	6	1
3	14	10	1	1
4	14	15	1	1
5	14	15	2	1
6	14	20	1	1
7	14	30	1	2
8	14	30	2	3
9	14	60	1	2
10	14	60	2	1
11	32	30	2	1
12	54	10	6	1

Подсчитаем для пятого ранга те же выражения, что и для четвёртого:

$BN(5)=\sum C_{i4}=23$, $i=2,4$.

$B(5)=\sum C_{i2}\cdot C_{i4}=522$, $i=2,4$.

$FN(5)=\sum\frac{C_{i2}\cdot C_{i4}}{C_{i3}}=210$, $i=2,4$.

$D(5)=\sum C_{i1}\cdot C_{i2}\cdot C_{i4}=7581$, $i=2,4$.

$DCN(5)=\sum(2C_{14}+C_{24})=7$

$DC(5)=\sum(2C_{14}\cdot C_{12}+C_{24}\cdot C_{22})=81$.

$DSN(5)=\sum(2C_{34}+C_{24})=7$, $i=2,4$.

$DS(5)=\sum(2C_{34}\cdot C_{32}+C_{24}\cdot C_{22})=81$, $i=2,4$.

Суммируем только те строки, где $C_{42}C_{43}$ = 5! = 120. $RN(5)=\sum \frac{C_{i1}\cdot C_{i4}}{C_{i3}}=7$, $i=2,4$.

Суммируем только те строки, где $C_{42}C_{43}$ = 5! = 120. $R(5)=\sum C_{i1}\cdot C_{i2}\cdot C_{i4}=840$, $i=2,4$

Таблица 7– Блоки ранга 6, содержащие две дизъюнктивно самодополнительные МБФ

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
1	8	1	1	1
2	8	6	1	1
3	8	10	1	1
4	8	15	1	3
5	8	45	1	2
6	8	60	1	3
7	8	60	2	1
8	8	90	1	1
9	8	90	2	1
10	8	180	1	2
11	2	36	2	1
12	4	10	2	1
13	4	15	2	1
14	10	180	1	1
15	12	60	1	1
16	32	90	1	1

Таблица 8 – Блоки ранга 6, содержащие2 самодвойственные МБФ

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{30}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}
1	2	6	2	1
2	2	10	2	1
3	2	60	2	1
4	2	90	2	1
5	4	6	1	1
6	6	45	2	3
7	8	6	1	1
8	8	20	1	1
9	8	30	1	1
10	8	60	1	4
11	8	180	1	2
12	8	180	2	1
13	10	180	1	1

Таблица 9 – Циклические блоки 6 ранга

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{40}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}
1	4	15	2	1
2	4	45	4	2
3	4	60	2	4
4	4	60	4	2
5	4	90	2	2
6	4	90	4	6
7	4	120	2	2

Продолжение таблицы 9

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{40}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}
8	4	180	2	10
9	4	180	4	4
10	4	360	1	1
11	4	360	2	22
12	4	720	1	5
13	6	20	6	2
14	8	15	2	1

Продолжение таблицы 9

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{40}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}
15	8	45	8	1
16	8	60	1	1
17	8	90	2	1
18	12	30	6	2
19	12	45	4	3
20	12	60	2	2
21	12	90	2	1
22	12	180	2	3
23	12	360	1	1
24	12	360	2	3
25	12	720	1	1
26	16	10	2	2
27	16	15	1	2
28	16	15	2	1
29	16	30	1	2
30	16	45	1	2
31	16	45	2	12
32	16	45	4	4
33	16	60	1	18
34	16	60	2	11
35	16	90	1	9
36	16	90	2	35
37	16	90	4	1
38	16	90	8	1
39	16	120	1	11
40	16	180	1	53
41	16	180	2	48
42	16	180	4	3
43	16	360	1	118
44	16	360	2	47
45	16	720	1	54
46	20	45	2	2
47	20	90	2	2
48	20	180	2	1
49	20	180	4	2
50	20	360	2	5
51	24	30	6	2
52	24	60	12	2
53	24	90	2	1
54	24	90	4	3
55	24	120	6	2
56	24	180	2	1
57	24	180	4	4
58	24	360	2	2
59	28	90	2	2

Продолжение таблицы 9

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{40}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}
60	28	180	2	5
61	28	180	4	1
62	28	360	2	7
63	28	720	1	1
64	32	36	2	1
65	32	90	2	1
66	32	180	2	2
67	32	360	1	2
68	32	360	2	9
69	36	45	4	2
70	36	120	6	1
71	36	180	2	2
72	36	360	2	6
73	40	180	2	1
74	40	360	2	1
75	44	180	2	1
76	48	15	6	1
77	48	30	6	1
78	48	60	6	1
79	48	90	8	2
80	48	120	6	1
81	48	180	2	5
82	48	180	4	2
83	48	240	3	2
84	48	360	2	1
85	52	180	2	1
86	56	180	2	1
87	56	180	4	2
88	64	360	2	1
89	68	360	2	4
90	70	360	1	1
91	72	60	12	2
92	78	90	2	2
93	80	180	2	2
94	80	180	4	1
95	80	360	2	3
96	84	120	6	2
97	88	180	4	1
98	92	180	2	2
99	96	60	6	1
100	96	120	6	2
101	96	180	2	1
102	104	180	2	1
103	108	120	6	4
104	108	180	2	2

Продолжение таблицы 9

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из .бл.)
C_{40}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}
105	112	180	4	1
106	112	360	2	1
107	116	360	2	1
108	120	180	4	2
109	120	360	2	1
110	128	90	4	2
111	128	360	2	1
112	132	360	2	1
113	136	180	4	4
114	140	360	2	2
115	144	60	6	1
116	152	180	4	2
117	152	360	1	1
118	156	60	12	2
119	156	360	2	1
120	162	60	6	2
121	164	180	2	1
122	164	180	4	2
123	172	180	2	1
124	174	120	6	2
125	180	180	2	1
126	184	180	2	2
127	184	360	1	1
128	188	180	2	1
129	196	360	2	1
130	204	60	12	2
131	204	120	6	1
132	204	180	2	1
133	204	360	2	1
134	208	180	2	2
135	212	180	2	1
136	216	180	4	1
137	240	120	3	1
138	244	360	2	1

Продолжение таблицы 9

№ п/п	Кол-во МБФ в блоке	Кол-во изом. блоков	Индекс блока	Кол-во неизом. блоков (гр. из. бл.)
C_{40}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}
139	248	90	4	2
140	248	90	8	2
141	256	90	2	1
142	256	180	2	1
143	256	360	1	1
144	264	120	6	1
145	264	360	2	1
146	268	180	2	1
147	288	120	6	1
148	296	180	4	1
149	336	90	4	2
150	376	90	4	1
151	376	180	2	1
152	396	120	6	1
153	408	180	4	1
154	432	20	6	1
155	432	60	6	2
156	432	90	2	1
157	438	120	6	2
158	444	120	6	1
159	456	120	6	1
160	468	120	6	1
161	504	120	6	1
162	512	90	8	2
163	540	120	6	1
164	576	120	6	1
165	696	120	6	1
166	732	180	4	2
167	760	180	4	1
168	768	120	6	1
169	792	120	6	1
170	828	120	6	1
171	1232	90	8	1
172	2052	120	6	1
173	2064	120	6	1

Подсчитаем для шестого ранга те же выражения, что и для четвёртого:

$$BN(6) = \sum C_{i4} = 775,\ i = 1,3,4 .$$

$$B(6) = \sum C_{i2} \cdot C_{i4} = 189182,\ i = 1,3,4 .$$

$$FN(6) = \sum \frac{C_{i2} \cdot C_{i4}}{C_{i3}} = 16353,\ i = 1,3,4 .$$

$$D(6) = \sum C_{i1} \cdot C_{i2} \cdot C_{i4} = 7828354,\ i = 1,3,4 .$$

$$DCN(6)=\sum(2C_{14}+C_{24})=39.$$

$$DC(6)=\sum(2C_{14}\cdot C_{12}+C_{24}\cdot C_{22})=2646.$$

$$DSN(6)=\sum(2C_{34}+C_{24})=30,\ i=1,3,4.$$

$$DS(6)=\sum(2C_{34}\cdot C_{32}+C_{24}\cdot C_{22})=2646,\ i=1,3,4.$$

Суммируем только те строки, где $C_{42}C_{43}$ = 6! = 720. $RN(6)=\sum\frac{C_{i1}\cdot C_{i4}}{C_{i3}}=7281,\ i=1,3,4$.

Суммируем только те строки, где $C_{42}C_{43}$ = 6! = 720. $R(6)=\sum C_{i1}\cdot C_{i2}\cdot C_{i4}=5242320$, $i=1,3,4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Этот метод не ограничен числом переменных, так как для любой МБФ с любым числом переменных *n* с помощью операций дизъюнктивного дополнения и двойственности можно построить блок, содержащий эту МБФ. При этом для описания всех МБФ от *n* переменных достаточно построить только неизоморфные блоки. Это очень значительно сокращает описание всех МБФ от *n* переменных. Например, все МБФ от 6 переменных можно разбить на 189182 блока, но из них можно выбрать только 775 попарно неизоморфных. Классы эквивалентности и неизоморфные блоки напрямую связаны с числами Дедекинда.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Dedekind R.*Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler/R.Dedekind //Festschrift Hoch. Braunschweig u. ges. Werke. II – 1897–P 103–148.

2 *Wiedemann Doug* A computation of the eighth Dedekind numberOrder 8 / DougWiedemann //Discrete Appl. Math. – № 115 – 1991. № 1.–P5–9.

3 *Tkachenco V.G.*Blocks of Monotone BoleanFunctions/ V.G. Tkachenco,O.V. Sinyavsky //Computer Science and Information Technology. –Horizon Research Publishing Corporation(HRPUB) – Alhambra, California. USA, 2016. – V.4, №2. –P. 72–78.DOI: 10.13189/csit.2016.040203.

4 *Tkachenco V.G.*Blocks of Monotone BoleanFunctions of Rank 5/ V.G. Tkachenco,O.V. Sinyavsky //Computer Science and Information Technology. –Horizon Research Publishing Corporation(HRPUB) – Alhambra, California. USA, 2016. – V.4, №4. –P. 139 – 146.,DOI: 10.13189/csit.2016.040402

5 *Ткаченко В.Г.* Метод построения блоков монотонных булевых функций/ В.Г. Ткаченко //Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2011. – № 1. – С. 79– 83.

6 *Иваницкий А.М.* Графы, матроиды, монотонные булевы функции и принцип взаимосоответсвия/ А.М. Иваницкий, В.Г. Ткаченко. – Одесса, 2012. – 148 с.

7 *T. Stephen* Counting in equivalent monotone Boolean functions/ StephenT., YusunT.//Discrete Appl. Math.– №167 –2014.– 15–24. DOI:10.1016/j.dam.2013.11.015.

REFERENCES

1 Dedekind R. Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler. Festschrift Hoch. Braunschweig u. ges. Werke. II, 1897, 103–148.

2 Wiedemann Doug A computation of the eighth Dedekind numberOrder 8.Discrete Appl. Math. – №115, 5–9,1991.

3 Tkachenco V.G., Sinyavsky O.V. (2016). Blocks of Monotone Boolean Functions, Computer Science and Information Technology Vol. 4(2), pp. 72–78. DOI: 10.13189/csit.2016.040203.

4 Tkachenco V.G., Sinyavsky O.V. (2016). Blocks of Monotone Boolean Functions of Rank 5, Computer Science and Information Technology 4(4): pp.139–146, 2016, DOI: 10.13189/csit.2016.040402

5 Tkachenco V.G.The Methodfor constructing blocks of monotononous Boolean functions,Research works of ONAT n.a. O.S. Popov,№ 1,79– 83, 2011.

6 IvanickijA.M., Tkachenco V.G.Graphs, matroids, monotonone Boolean functions andthe principle ofmutualcompliance, Odessa, 2012, 148 p.

7 T. Stephen, T. Yusun, Counting inequivalent monotone boolean functions, Discrete Appl. Math. №167, 15–24, 2014. doi:10.1016/j.dam.2013.11.015.