Системы электронной коммутации

УДК 261.391.28

Кононович В.Г., Тринтина Н.А.
Kononovich V.G., Trintina N.A.

Расчет числа мест ожидания для системы с коммутацией сообщения

Calculation number space for expectation for a system with communication information

Аннотация. Данная работа посвящена вопросу расчета числа мест ожидания для системы с коммутацией сообщения при определенных нормах, предъявляемых к качеству обслуживания сообщения.

Abstract. This paper describes question calculation number space for expectation for a system with communication information with some norms, which produce to quality service information.

В реальных технических системах всегда имеется ограниченное число мест для ожидания. Целью данной работы является изучение влияния, которое оказывают эти обусловленные техникой ограничения.

Рассмотрим систему с ожиданием при наличии ограниченного числа мест для ожидания.

Существуют три случая:

1. $0 \le j < n$ - заявка обслуживается немедленно;
2. $n \le j \le n+r$ - заявка ожидает;
3. $j=n+r$ - вызов теряется.

Здесь r - число мест; n - число исходящих линий.

Если считать, что расстояние между вызовами примет экспоненциальное распределение с параметром *a*, а времена обслуживания независимы и также имеют экспоненциальное распределение с параметром t_m, то для режима статистического равновесия и при $A=t_m/a$ можно получить систему уравнений для P_j - вероятности, что вновь поступивший вызов застанет систему в состоянии j.

Обозначая через X(t) число занятий, имеющихся в системе в момент t, определим вероятности

$$P_j(t)=P\{X(t)=j\};\ j=0,1...$$

Очевидно, для того, чтобы состояния $X(t)=j$ могли возникнуть, имеются следующие возможности:

1. $X(t-h)=j-1$ - за время h поступает один вызов и не оканчивается ни одно из занятий;
2. $X(t-h)=j$ - за время h не происходит ни одно из изменений;
3. $X(t-h)=j+1$ - за время h оканчивается одно из j+1 занятий и не поступает ни одного вызова;
4. Состояние j в момент t может еще следовать из любого состояния в момент t-h за счет того, что в интервале длины h происходят многократные изменения.

Так как вероятности возникновения и окончания занятий не зависят от состояний системы, то из вероятности, что за время Δt поступит один вызов

$$P(1/\Delta t)=\frac{\Delta t}{a}e^{\Delta t_a} \Rightarrow \frac{\Delta t}{a}+Q(\Delta t)$$

и вероятность того, что за Δt окончится точно одно из j занятий, равна:

$$P(1/\Delta t, j) = \frac{j\Delta t}{t_m} + Q(\Delta t)$$

при j>0 получается:

$$P_j(t) = P_{j-1}(t-h)\frac{h}{a}(1-(j-1)\frac{h}{t_m}) + P_j(t-h)(1-\frac{h}{a})(1-\frac{jh}{t_m}) +$$

$$+ P_{j+1}(t-h)(1-\frac{h}{a})(1+1)\frac{h}{t_m} + 0(h)$$

при j=0 первое слагаемое исчезает

$$\frac{P_j(t)-P_j(t-h)}{h} = \frac{1}{a}P_{j-1}(t-h) - (\frac{1}{a}+\frac{j}{t_m})\dot{P}_j(t-h) + \frac{j+1}{t_m})P_{j+1}(t-h) + 0(h)$$

отсюда путем предельного перехода при $h \to 0$

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \frac{1}{a}P_{j-1}(t) - (\frac{1}{a}+\frac{j}{t_m})P_j(t) + \frac{j+1}{t_m})P_{j+1}(t)$$

при j=0 и если $P_j = \lim_{t\to\infty} P_j(t)$

$$AP_{j-1}-(A+j)P_j+(j+1)P_{j+1}=0;\ j=1...2$$

$$j=0;\ AP_0-P_1=0$$

Используя метод полной индукции, получаем формулу:

$$P_{j+1} = \frac{A}{(j+1)}P_j, \qquad P_j = \frac{A^j}{j!}P_0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$$

В нашем случае получаем систему уравнений:

$$P_j = \begin{cases} \dfrac{A}{j+1}P_j & j = 0\dots n-1 \\ \dfrac{A}{n}P_j & j = n\dots n+r-1 \end{cases} \qquad \sum_{j=0}^{n+r} P_j = 1$$

Так как входящий поток является пуассоновским потоком первого рода, то для интенсивности поступающей нагрузки из формулы $A = t_m \sum_{j=0}^{n} \frac{P_j}{a_j}$ следует $A = \frac{t_m}{a}\sum_{j=0}^{n} P_j = \frac{t_m}{a}$. Так как все поступающие вызовы остаются в системе, то при всех j из выражения

$$B = \lim_{t\to\infty} B(t) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty}(1-g(j))\frac{P_j}{a_j}}{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{P_j}{a_j}},$$

где g(j) - вероятность того, что вновь поступивший вызов останется в системе. Для систем с ожиданием g(j)=1 при всех j B - вероятность потери вызова B=0. Для вероятностей состояний следует

$$\sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{A}{n}\right)^{j-n} = \frac{1}{1-\frac{A}{n}} = \frac{n}{n-A}.$$

Подставляя в уже выведенную формулу вероятностей для полнодоступного пучка, получим:

$$P_j = \begin{cases} P_0 \dfrac{t_m^j}{j!} \prod\limits_{\lambda=0}^{j-1} \dfrac{y(\lambda)}{a_\lambda} & j = 1 \ldots n \\ P_0 \dfrac{t_m}{n!} (\dfrac{t_m}{n})^{j-n} \prod\limits_{\lambda=0}^{j-1} \dfrac{g(\lambda)}{a_\lambda} & j = n+1 \end{cases} \qquad P_j = \begin{cases} P_0 \dfrac{t_m^j}{j!} \prod\limits_{\lambda=0}^{j-1} \dfrac{1}{a_\lambda} & j = 1 \ldots n-1 \\ P_0 \dfrac{t_m^n}{n!} (\dfrac{t_m}{n})^{j-n} \prod\limits_{\lambda=0}^{j-1} \dfrac{1}{a_\lambda} & j = n \ldots n+r \end{cases}$$

$$P_j = \begin{cases} \dfrac{P_0 (\frac{t_m}{a})^j}{j!} & j = 1 \ldots n-1 \\ P_0 \dfrac{t_m^j t_m^{n-j} t_m^{j-n}}{n! n^{j-n} a^j} & j = n \ldots n+r \end{cases} \qquad P_j = \begin{cases} P_0 \dfrac{A^j}{j!} & \\ P_0 \dfrac{A^j}{n! n^{j-n}} & j = n \ldots n+r \end{cases}$$

$$P_0 = (1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{t_m^i}{i!} \prod_{\lambda=0}^{j-1} \frac{g(\lambda)}{a_\lambda} + \frac{t_m^n}{n!} \sum_{i=n+1}^{r} (\frac{t_m}{n})^{i-n} \prod_{\lambda=0}^{j-1} \frac{g(\lambda)}{a_\lambda})^{-1} = (1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{A^i}{i!} + \frac{t_m^n}{n} \sum_{i=n+1}^{r} (\frac{t_m}{n})^{i-n} \prod_{\lambda=0}^{j-1} \frac{1}{a_\lambda})^{-1} =$$

$$= (1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^n}{n!} \sum_{i=n+1}^{\infty} (\frac{A}{n})^{i-n} - \sum_{i=n+r+1}^{\infty} (\frac{A}{n})^{i-n})^{-1} =$$

$$= (1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^n}{n!} \frac{n}{n-A} (1 - (\frac{A}{n})^{r+1})^{-1} = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^n}{n!} \frac{n}{n-A} (1 - (\frac{A}{n})^{r+1}}$$

Вероятность потерь из-за ограниченного числа мест для ожидания

$$B = P_{n+r} = \frac{A^{n+r}}{n! n^r} P_0 .$$

И если n=1

$$P_0 = \frac{1}{A \frac{1}{1-A} (1 - A^{r+1})}, \qquad B = A^r \frac{1}{A \frac{1}{1-A} (1 - A^{r+1})} .$$

Если P(>x,t) - вероятность того, что поступивший в момент t вызов будет ожидать больше, чем x, то назовем вероятностью превышения времени ожидания асимптотическое по времени значение функции.

$$P(> x, t) \quad P(> x) = \lim_{t \to \infty} P(> x, t)$$

Функция P(>x) является дополнительной к функции распределения времени ожидания. Вычислим сначала распределение времени ожидания для вызова, поступившего в момент t и заставшего пучок в состоянии j при $j \geq n$, то есть когда пучок занят полностью. j-n - ранее поступившие вызовы, ожидающие в очереди.

Предположим, что вызовы обслуживаются в порядке их поступления. Если обозначить через t_i - моменты времени начала обслуживания j-n ожидающих вызовов; через τ_i - момент начала обслуживания вызова, поступившего в момент t, то j+1-n временных интервалов t_1-t, t_2-t_1... являются независимыми случайными величинами с одинаковой функцией распределения $1 - e^{-nx/t_m}$. Поэтому вероятность того, что ни одна из n линий, занятых в момент t_0, не освободится к моменту t_0+x , составит e^{-nx/t_m}.

Время ожидания τ_i-t является суммой j-n+1 следующих случайных величин:

$$\tau_j\text{-}t = (\tau_i\text{-}t_{j-n}) + (t_{j-n}\text{-}t_{j-n-1}) \ldots (t_1\text{-}t).$$

Поэтому функция распределения τ_i-t является j-n+1 кратной сверткой экспоненциального распределения. Вычисления дают вероятность того, что вызов, заставший систему в состоянии j, будет ожидать более, чем x

$$P(\tau_j - t > x) = (1 + \tau + \ldots \frac{\tau^{j-n}}{(j-n)!}) e^{-\tau} \qquad \tau = \frac{nx}{t_m},$$

что соответствует

$$P_k(>x)=\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{nx}{t_m}\right)^j\frac{1}{j!}e^{-\frac{nx}{t_m}}$$

Здесь $P_k(>x)$ - вероятность того, что вновь поступивший вызов, который застал в системе n+k вызовов $0<k\le r-1$, будет ожидать в течение большего времени, чем x. В соответствии с формулой полной вероятности и после некоторых преобразований получим:

$$P(>x)=\sum_{k=0}^{r-1}P_{n+k}P_k(>x)=\frac{P(>0)}{1-\left(\frac{A}{n}\right)^r}\left(e^{-(n-A)^t/t_m}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{\left(\frac{At}{t_m}\right)^k}{k!}e^{-\frac{At}{t_m}}-\left(\frac{A}{n}\right)^r\sum_{k=0}^{r-1}\frac{\left(\frac{nt}{t_m}\right)^k}{k!}e^{-\frac{nt}{t_m}}\right).$$

Здесь вероятность ожидания равна

$$P(>0)=\frac{A^n}{n!}\frac{n}{n-A}\left(1-\left(\frac{A}{n}\right)^r\right)P_0.$$

Среднее время ожидания для ожидающих вызовов определяется по формуле

$$t_\omega=\left(\frac{1}{n-A}-\frac{r\left(\frac{A}{n}\right)^r}{n\left(1-\left(\frac{A}{n}\right)^r\right)}\right)t_m.$$

Вероятность того, что вновь поступивший вызов или будет ожидать, или будет потерян

$$P(>0)+B=\frac{A^n}{n!}\frac{n}{n-A}\left(1-\left(\frac{A}{n}\right)^{r+1}\right)P_0.$$

Для вычисления вероятности своевременной доставки сообщения достаточно знать:

- 1-B - *вероятность того, что сообщения, находящиеся в очереди, не получат отказа вследствие ограниченного числа мест для ожидания;*
- h(ν) - *преобразование Лапласа-Стильтьеса функции распределения времени обслуживания;*
- $\omega_r(\nu)$ - *преобразование Лапласа-Стильтьеса функции распределения времени ожидания при ограниченном числе мест для ожидания, равном r.*

В силу мультиплексивности преобразования Лапласа-Стильтьеса

$$Q=(1-B)h(\nu)\omega_r(\nu),\quad h(\nu)=\frac{\mu(\nu+d)}{(\nu+d)(\nu+\mu)+c\nu},$$

где
- Q - вероятность своевременной доставки сообщения;
- ν - интенсивность старения сообщения;
- μ - интенсивность обслуживания сообщения;
- c - интенсивность исправной работы;
- d - интенсивность восстановления.

При обслуживании с ограниченной очередью производится усечение ряда. Воспользовавшись производящей функцией вида

$$P(z)=\sum_{j=0}^{r-1}P_jz^j\quad P_j>0\quad P(1)=1$$

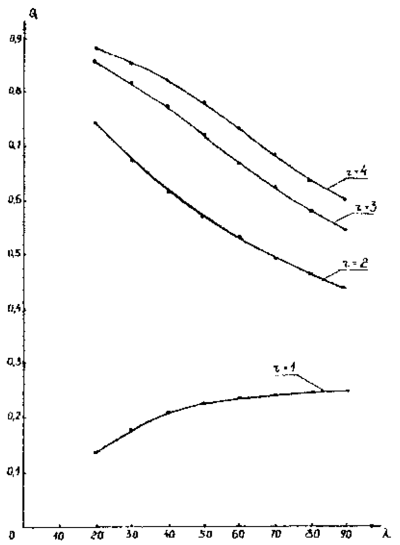
при $z=1-\nu/\lambda$ $\rho=\lambda/\mu$, получим вероятность своевременной доставки сообщения

$$Q=(1-B)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1-\rho}{1-\rho^{r+1}}\rho^j\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)^j.$$

Некоторые расчеты представлены в табл. 1.

Таблица 1

r \ λ	20	30	40	50	60	70	80	90
1	0.1389	0.1775	0.2041	0.2222	0.2344	0.2422	0.2496	0.2493
2	7441	6777	6197	5714	5390	4971	4682	4461
3	8608	8204	7717	7210	6711	6239	5810	5482
4	8834	8592	8257	7842	7370	6876	6388	6017



При увеличении числа мест для ожидания с одного до четырех, при $\lambda=80$, $\mu=100$ вероятность своевременной доставки сообщения увеличивается на 39.19%. Чем больше интенсивность входящего потока, тем меньше вероятность своевременной доставки сообщения при постоянной интенсивности обслуживания. Если число мест для ожидания равно трем, то при возрастании интенсивности входящего потока с $\lambda_1=20$, $\lambda_2=90$ вероятность своевременной доставки сообщения уменьшается на 31.26%.

На рисунке представлена зависимость вероятности своевременной доставки сообщения от интенсивности входящего потока для однолинейной системы обслуживания и различном числе мест для ожидания, при фиксированной интенсивности обслуживания. Расчет числа мест для ожидания производится при нормированном значении вероятности своевременной доставки сообщения, интенсивности входящего потока, интенсивности обслуживания и интенсивности старения сообщения.

Выводы

В результате работы получена расчетная формула, определяющая число мест для ожидания при определенных нормах, предъявляемых к качеству обслуживания сообщения.

Литература

1. Штермер Х. Теория телетрафика. - М.:Связь, 1971.
2. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания / М.: Наука, 1966.
3. Захаров Г.П. Методы исследования сетей передачи данных. - М.: Радио и связь, 1982.

Кононович Владимир Григорьевич - кандидат технических наук, доцент. Родился в 1941 году. Диссертационную работу по теме "Потери достоверности в отдельных узлах аппаратуры передачи бинарных сигналов" защитил в марте 1974 года.

В.Г.Кононович - автор более 40 научных работ и научно-производственных изданий.

Тринтина Наталья Альбертовна - аспирантка. Родилась в 1971 году. В 1993 году окончила Одесский электротехнический институт связи им.А.С.Попова. В 1994 году поступила в аспирантуру при Украинской государственной академии связи им.А.С.Попова . Работает над диссертацией на тему "Исследование и оптимизация пропускной способности низовых сетей передачи и обработки сообщений".